Martins COLÉGIO-CURSO

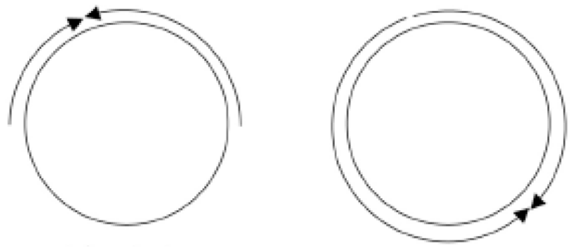
BANCO DE EXERCÍCIOS - 24 HORAS

• 9º ANO ESPECIALIZADO/CURSO – ESCOLAS TÉCNICAS E MILITARES •

• FOLHA Nº 09 – GABARITO COMENTADO •

1) Nas condições do problema, a dimensão máxima, em centímetros, de cada um dos ladrilhos é o mdc (425, 300) = 25.

2) No momento do primeiro cruzamento, Alex e José Maurício percorreram a distância total igual à metade da extensão da pista. Entre o primeiro e o segundo cruzamento, os rapazes percorreram uma distância total igual à extensão da pista. Portanto Alex correu o dobro da distância que correu até o primeiro cruzamento, ou seja, metros e, deste modo, a extensão da pista é 400 + 350 = 750 metros.



Até o primeiro   Entre o primeiro e o segundo

OPÇÃO A

3) Se houver um número maior ou igual a 13 meninos na sala é possível selecionar estes 13 meninos para compor um grupo de 13 alunos, um absurdo, já que para quaisquer 13 alunos pelo menos um é menina. Assim, há no máximo 12 meninos na sala. Da mesma maneira, concluímos que há no máximo 20 meninas na sala. Logo, a razão entre a quantidade de meninos e de meninas da sala é 12/20 = 6/10 = 3/5.

OPÇÃO C

4) Tem-se $a = k(b + c)$, $b = k(c + a)$ e $c = k(a + b)$. Logo, $(a + b + c) = 2k(a + b + c)$. Há dois casos: (*i*) $a + b + c \;\; 0$; neste caso, $k = ½$ (e a igualdade ocorre se e só se $a = b = c \neq 0$);
(*ii*) $a + b + c = 0$. Neste caso, tem-se $a/(b + c) = b/(c + a) = c/(a + b). = –1$. Portanto, k pode assumir os valores ½ ou –1.

OPÇÃO C

5) O intervalo de tempo entre a partida e o primeiro encontro é igual ao intervalo de tempo entre o primeiro encontro e o segundo encontro, no ponto de partida. Isso acontece porque ao se inverterem as velocidades, a situação seria a mesma que se cada um deles retornasse ao ponto de partida pelo caminho que veio, com a mesma velocidade. Portanto, eles chegarão no mesmo instante, ou seja, o tempo que um irá esperar pelo outro será igual a 0.

OPÇÃO A

6) 34000/k = x
34000/2k = y
32000/5k = z
x + y + z = 34000
34000 = 34000(1/k+1/2k+1/5k)
1=1/k+1/2k+1/5k
1=(10+5+2)/10k
10k=17
k=17/10
Para Ana, queremos o x
x = 34000/17/10
x = 340000/17
x = 20000 reais

OPÇÃO A

7) Inicialmente, o dinheiro total que as moças têm é igual a 11. 2 + 7 . 5 + 3 . 10 = 87, e com isso, temos que cada uma das moças deve possuir 87/3 = 29 reais. Além disso, note que Esmeralda possui 22 reais, Rose tem 35 reais e Nelly tem 30 reais. Como Rosa e Nelly possuem mais do que 29 reais, elas devem dar algumas notas a alguém – Rosa deve dar pelo menos 2 notas de 5 (se ela desse só uma nota, ela teria 30 reais, mais do que 29), e Nelly deve dar pelo menos uma nota de 10. Daí, para Rosa conseguir 29 reais ela precisa receber pelo menos 2 notas de 2 reais, e para Nelly conseguir 29 reais, ela deve receber uma nota de 5 e duas de 2 reais. Portanto, Esmeralda entrega no mínimo 4 notas de 2 reais, Rosa entrega no mínimo 2 notas de 25 reais e Nelly entrega pelo menos uma nota de 10 reais.

Com isso, o número de notas que trocaram de mãos é pelo menos 7. De fato, com 7 trocas é possível que as três moças possuam 29 reais:

- Nelly entrega uma nota de 10 reais a Esmeralda;
- Rosa entrega uma nota de 5 reais a Esmeralda e outra para Nelly;
- Esmeralda entrega duas notas de 2 reais a Rosa e 2 notas de 2 reais para Nelly;

OPÇÃO C

8) Total de bolas (n): 50 + 8x, sendo que o x = lote de 8 bolas

número de bolas vermelhas: 49 + 7x

do total de bolas, 90% são vermelhas, então:

$$\frac{49+7x}{50+8x}=0,9$$

49 + 7x = 45 + 7,2x

0,2x = 4

x = 20

logo:

n = 50 + 8 (20) = 210

OPÇÃO B

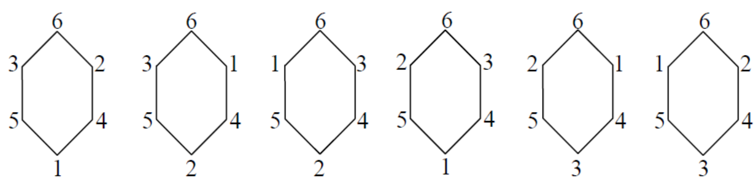
9) A proporção apresentada nos permite construir o seguinte padrão:

Meninos	Meninas	Total
1	5	6
2	6	8
3	7	10
4	8	12
5	9	14
...	...	...
15	19	34
16	20	36

Nela vemos que há 20 meninas nessa classe.

OPÇÃO E

10) Na soma dos números escritos em lados alternados do hexágono, aparecem produtos de números no conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Essa soma é mínima se os maiores números são multiplicados pelos menores números. Se os números $\{5, 6, 4\}$ não são adjacentes no hexágono, temos 6 possíveis distribuições.



Dessas configurações, a menor soma é 58. Se pelo menos dois números do conjunto {4, 5, 6} são adjacentes, é fácil ver que a soma é maior que 58

OPÇÃO B

11) Vamos resolver a seguinte equação diofantina:
$300x + 450y = 10000$, simplificando temos: $7x + 9y = 200$.
Uma solução particular da equação é $x = 8$ e $y = 16$
As soluções da equação diofantina são dadas por:
$x = 8 + 9t$
$y = 16 - 7t$
o total de viagens é dado por $x + y = 24 + 2t$
como x e y são os números de viagens, temos que $x > 0$ e $y > 0$.
Logo $t \in \{0, 1, 2\}$
O número mínimo de viagens ocorrerá quando $t = 0$. Logo $x + y = 24$.
OPÇÃO A

12) Podemos contar todas as maneiras de receber o troco de 37 centavos fazendo uma listagem de todos os recebimentos possíveis, ordenando as moedas em ordem decrescente: ou seja, dado que $37 = 25x + 10y + 5z + 1w$, basta contar quantas soluções inteiras não-negativas essa equação possui. Note que x representa o número de moedas de 25 centavos, y o número de moedas de 10 centavos, z o de 5 centavos e w o de 1 centavo. As soluções são:
(0,0,7,2);(0,0,6,7);(0,0,5,12);(0,0,4,17);(0,0,3,22);(0,0,2,27);(0,0,1,32);(0,0,0,37)
(0,2,1,12);(0,2,0,17);(0,1,5,2);(0,1,4,7);(0,1,3,12);(0,1,2,17);(0,1,1,22);(0,1,0,27)
(1,1,0,2);(1,0,2,2);(1,0,1,7);(1,0,0,12);(0,3,1,2);(0,3,0,7);(0,2,3,2);(0,2,2,7);
Logo, há um total de 24 maneiras.
OPÇÃO D

13) O número x de motoristas diferentes que passam por semana no local é tal que $3 \,.\, x = 7 \,.\, 30.000 \rightarrow x = 70.000$, pois cada motorista passa três vezes por semana no local e em cada um dos sete dias da semana passam 30.000 motoristas. Assim, o anúncio foi visto por $40\%x = 40\% \,.\, 70.000 = 28.000$ motoristas diferentes.
OPÇÃO B

14) Para que tenhamos raízes inversas, o produto das raízes deve ser igual a 1.
$c/a = 1$
$c = a$
$k + 2 = 4$
$k = 2$

OPÇÃO C

15) $x_1 \,.\, x_2 = c/a$
$c \,.\, x_2 = c/a$
$x_2 = 1/a$

OPÇÃO E

16)

CAPACIDADE	RALOS	HORAS
900	6	6
500	x	4

$$\frac{6}{x} = \frac{4}{6} \cdot \frac{900}{500}$$
$36x = 180$
$X = 5$

OPÇÃO C

17) A linha 50 tem portanto (2 . 50 – 1) = 99 termos;

OPÇÃO B

18) como o primeiro termo da linha 50 é 50, e como ela forma uma progressão aritmética de razão 1 e tem 99 termos, o seu último termo é 50 + (99 – 1).1 = 148. Logo a linha 50 é a sequência 50, 51, 52, 53, ..., 148.

A soma dos seus termos é: $S = \frac{(50+148).99}{2} = 99^2 = 9801$

OPÇÃO B

19) Como a média dos números é 98 eles são 98 − x e 98 + x, x inteiro positivo. Como os números têm dois dígitos, $98 + x < 100 \Leftrightarrow x < 2$. Assim, x = 1 e a diferença entre os números é (98 + 1) – (98 – 1) = 2.

OPÇÃO B

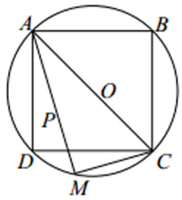
20) Como cada representante não se comunica com quem está a direita e nem a esquerda e não fala consigo mesmo, o total de comunicações é dado por 26 . 23 = 598.

Como essa comunicação só será contada uma única vez, o total é 598 : 2 = 299

OPÇÃO A

21) Trace a diagonal AC que intersecta DB no ponto O. Sendo ABCD um quadro, O é o centro da circunferência. Observe que $\angle$ CMA = 90° e $\angle$ POA = $\angle$ DOA = 90°. Logo, pelo caso AA, os triângulos AOP e AMC são semelhantes e , portanto,

$$\frac{AP}{AC} = \frac{AO}{AM} \Leftrightarrow \frac{AP}{60} = \frac{30}{50} \Leftrightarrow AP = 36$$



OPÇÃO B

22) I) Verdadeira. Sabendo que a área do triângulo ABC mede 48 cm² e que $\overline{AP} = \frac{2}{3}\cdot\overline{BC}$, vem

$$\begin{aligned}(ABC) = \frac{1}{2}\cdot\overline{BC}\cdot\overline{AP} &\Leftrightarrow 48 = \frac{1}{2}\cdot\overline{BC}\cdot\frac{2}{3}\cdot\overline{BC}\\ &\Leftrightarrow \overline{BC} = 3^2\cdot4^2\\ &\Rightarrow \overline{BC} = 12\,cm.\end{aligned}$$

Logo, $\overline{AP} = \frac{2}{3}\cdot 12 = 8\,cm.$

Como P é ponto médio de BC, é imediato, pelo Teorema de Pitágoras aplicado no triângulo APC, que $\overline{AB} = \overline{AC} = 10\,cm.$

Portanto, sendo M o pé da mediana relativa ao lado AC tem-se

$$\begin{aligned}\overline{BM} &= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2\cdot(\overline{AB}^2+\overline{BC}^2)-\overline{AC}^2}\\ &= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2\cdot(10^2+12^2)-10^2}\\ &= \sqrt{122-25}\\ &= \sqrt{97}\,cm.\end{aligned}$$

II) Falsa. De fato, sendo G o baricentro do triângulo ABC temos $\overline{AG} = \frac{2}{3}.\overline{AP} = \frac{2}{3}.12 = 8$ cm.

III) Falsa. Sabendo que $\overline{BM} = \sqrt{97}\,cm$, vem $\overline{BG} = \frac{2}{3}\cdot\overline{BM} = \frac{2\sqrt{97}}{3}\,cm$. Assim, do triângulo BGP, obtemos

$$\cos\alpha = \frac{\overline{BP}}{\overline{BG}} = \frac{6}{\frac{2\sqrt{97}}{3}} = \frac{9}{\sqrt{97}}$$

OPÇÃO A

23) No triângulo ABC, temos:

$AD = BD = CD = 1$

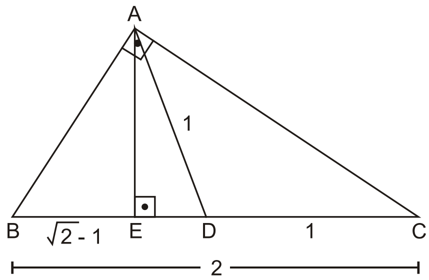
$AB^2 = 2\left(\sqrt{2}-1\right)$

e

$AC^2 + AB^2 = 2^2$

$AC = \sqrt{4 - 2\cdot(\sqrt{2}-1)}$

$AC = \sqrt{6 - 2\cdot\sqrt{2}}$



OPÇÃO C

24) Sejam r e R, respectivamente, o raio da circunferência inscrita e o raio da circunferência circunscrita ao triângulo ABC. Sabendo que $\frac{r}{R} = \frac{1}{2}$, vem $\frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \left(\frac{r}{R}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

Com os dados fornecidos podemos encontrar apenas a equação da reta suporte da outra diagonal. Portanto, nada se pode afirmar sobre o perímetro do quadrado.

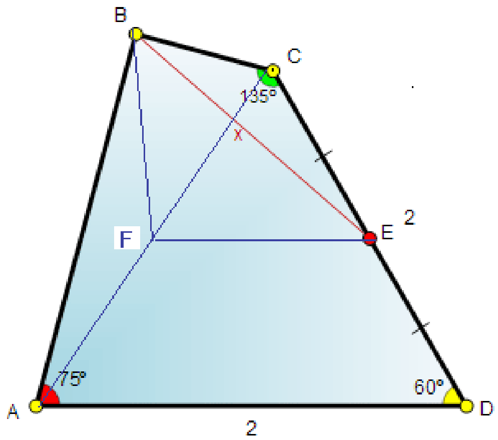
Seja ℓ a medida do lado do quadrado ABCD. Como os triângulos PRQ e PAB são semelhantes por AA, tem-se que

$\frac{24-\ell}{24} = \frac{\ell}{36} \Leftrightarrow \ell = \frac{72}{5}\text{cm}.$

Por conseguinte, a área hachurada é dada por $\frac{36\cdot 24}{2} - \left(\frac{72}{5}\right)^2 \cong 225\,\text{cm}^2$.

OPÇÃO B

25) Trace AC, e seja F médio de AC podemos afirmar que EF $= 1$



No triângulo BFE, BF = Ef = 1, e o ângulo BFE = 90

$\Rightarrow x = \sqrt{2}$

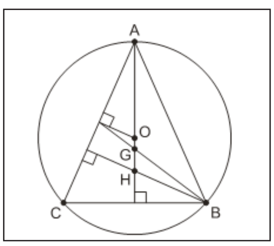
OPÇÃO A

26) Seja ABC um triângulo acutângulo isósceles.

Sejam O, G e H, respectivamente, o circuncentro, o baricentro e o ortocentro.

Como a distância do baricentro ao ortocentro é o dobro da distância do baricentro ao circuncentro, segue que

$$\left.\begin{array}{l}\overline{GH} = 2\cdot\overline{OG} \\ \overline{OH} = \overline{GH} + \overline{OG} = k\end{array}\right| \Rightarrow 3\cdot\overline{OG} = k \Rightarrow \overline{OG} = \frac{k}{3}.$$



OPÇÃO E

27) Do triângulo ABC, obtemos

$$\operatorname{sen} B\hat{A}C = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{1}{2}\cdot 40 = 20\,\text{cm} \ \text{ e } \ \cos B\hat{A}C = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 40 \cong 34\,\text{cm}.$$

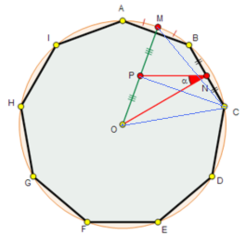
Além disso, como $D\hat{A}E = 45^\circ$, segue que $\overline{AD} = \overline{DE} = \overline{BC} = 20\,\text{cm}$.

Portanto, a área do triângulo ACE é dada por

$$\begin{aligned}(ACE) &= (ADC) - (ADE)\\ &= \frac{34\cdot 20}{2} - \frac{20\cdot 20}{2}\\ &= 140\,\text{cm}^2.\end{aligned}$$

OPÇÃO C

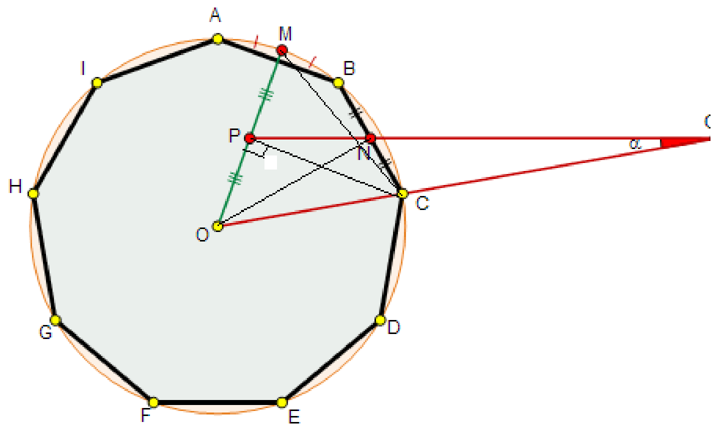
28) Como o ponto M é médio do arco AB, podemos afirmar que o triângulo COM é equilátero, e CP, a sua altura. Observe que o quadrilátero COPN é inscritível.



A medida do ângulo α assinalado tem a mesma medida do ângulo PCO $= 30^\circ$

OPÇÃO E

29) Observe que o quadrilátero CNOP é inscritível e o ângulo BCM $= 10^\circ$. Como o ângulo NCO mede 70° daí $\alpha = 10^\circ$



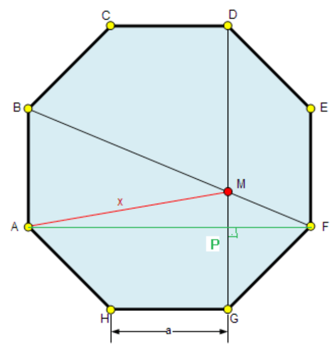
OPÇÃO A

30) Como o octógono é regular, pode-se afirmar que a medida do ângulo FGP é igual a 45° e o triângulo GFP é retângulo isóscele e os seus catetos são iguais a $\left(a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Observe que o triângulo GFM é isóscele e MP vale $\left(a - a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Como AP é igual a $\left(a + a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, pelo teorema de Pitágoras temos que AM $= a\sqrt{3}$

Como o lado do octógono é igual a $2\sqrt{3}$ cm, temos AM $= 2\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 6$



OPÇÃO A